Mathématiques : 1Bac SM

Séance 2-1 : Ensembles (Cours)

Professeur : Mr CHEDDADI Haitam

Sommaire

I- Généralités sur les ensembles

1-1/ Notion d'ensemble - élément d'un ensemble

Définition

Un ensemble E est une collection d'objets satisfaisant un certain nombre de propriétés et chacun de ces objets est appelé élément de cet ensemble.

Si x est un élément de l'ensemble E, on dit que x appartient à E et on note $x \in E$.

Si x n'appartient pas à E, on note $x \notin E$.

1-2/ Définition d'un ensemble

Il y a deux manières de définir un ensemble E :

- En extension :

On énumère tous les éléments de E, c'est-à-dire en donnant la liste de ses éléments, s'il possède un nombre fini d'éléments (pas trop grand).

Dans ce cas, l'ordre dans lequel on donne les éléments n'a aucune importance.

- En compréhension :

On décrit l'ensemble E en donnant une propriété qui caractérise ses éléments.

Si $P(x)$ est la propriété qui caractérise les éléments de E, alors on écrit : $E=\{x/P(x)\}$

Applications

1. Écrire en extension les ensembles suivants :

$A=\left\{x\in\mathbb{Z}/-\frac{5}{2}\leq x\leq\frac{3}{2}\right\}$ $B=\left\{x\in\mathbb{R}/x^2+x+1=0\right\}$ $C=\left\{x\in\mathbb{N}/x^2\leq 51\ et\ \sqrt{x-1}\in\mathbb{N}\right\}$	$D=\left\{x\in\mathbb{Z}/x^2+(x+1)^2+\left(x^2-2\right)^2=0\right\}$ $E=\left\{n\in\mathbb{N}/n^3<200\right\}$ $F=\{n\in\mathbb{N}/\ \lvert 3n-14\rvert\leq 10\}$

2. Écrire en compréhension les ensembles suivants :

$$G=\{3;6;9;12;15\}$$
$$H=\{1;3;9;27;81;..\}$$
$$J=\{\ldots;-8;-3;2;7;12;\ldots\}$$
$$K=\left\{1;-\frac{1}{2};\frac{1}{4};-\frac{1}{8};\frac{1}{16};\ldots\right\}$$
$$L=\left\{\ldots;\frac{1}{9};\frac{1}{3};1;3;9;\ldots\right\}$$

1-3/ Égalité de deux ensembles

Définition

Soit E et F deux ensembles.

On dit que E et F sont égaux lorsqu'ils ont les mêmes éléments, et on écrit $E=F$.

Applications

On considère l’ensemble : $E=\left\{x\in\mathbb{R}/-\frac{1}{4}<\frac{x}{x^2+4}<\frac{1}{4}\right\}$

1. Montrer que : $E=\mathbb{R}$

On considère les deux ensembles $A=]-\infty;-1[$ et $B=\left\{x\in\mathbb{R}/\frac{x}{x+1}>1\right\}$.

2. Montrer que : $A=B$

II- Parties d'un ensemble - Inclusion - Complémentaire

2-1/ Inclusion

Définition

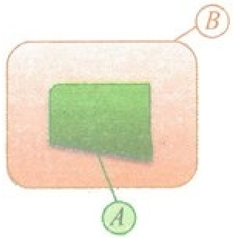
Soit A et B deux parties d'un ensemble E.

On dit que A est incluse dans B si chaque élément de A est un élément de B.

On note $A\subset B$.

On dit aussi que la partie A est contenue dans B ou que A est un sous-ensemble de B.

En d'autres termes : $A \subset B \Leftrightarrow [(\forall x \in E);\ x \in A \Rightarrow x \in B]$



Remarques

Soit A et B deux parties d'un ensemble E.

Dire que A n'est pas inclue dans B signifie qu 'il existe au moins un élément $x \in A$ tel que $x \notin B$, et on écrit $A \subsetneq B$.

Pour tout ensemble A, on a toujours $\emptyset \subset A$ et $A \subset A$.

Proposition

Soit A, B et C trois parties d'un ensemble E.

Si $A \subset B$ et $B \subset C$, alors $A \subset C$.

$A = B$ si, et seulement si $A \subset B$ et $B \subset A$.

Remarques

- L'écriture $A \neq B$ signifie que les ensembles A et B sont distincts.
- $A = B \Leftrightarrow [(\forall x \in E);\ x \in A \Leftrightarrow x \in B]$
- Si $A \subset B$ et $B \subset C$, alors on peut écrire $A \subset B \subset C$. Par exemple : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$

2-2/ Complémentaire

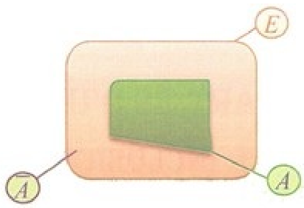
Définition

Soit A une partie d'un ensemble E.

L'ensemble des éléments de E n'appartenant pas à l'ensemble A est appelé le complémentaire de A dans E.

On le note C_E^A ou $\overline{A}$.

On a alors : $C_E^A = \{x \in E / x \notin A\}$ et $x \in \overline{A} \Leftrightarrow x \notin A$



Applications

On considère l'ensemble : $A = \left\{x \in \mathbb{N} / x^2 - 4x > 0\right\}$

1. Décrire en extension l'ensemble $C_{\mathbb{N}}^A$.

On considère l'ensemble suivant : $B = \left\{x \in \mathbb{R} / x^2 + x < 5\right\}$

2. Montrer que : $\left[2; +\infty\right[\subset C_{\mathbb{R}}^B$

On considère l'ensemble : $E = \left\{x \in \mathbb{R} / x^4 + x^3 + x^2 + x = 2\right\}$

3. Montrer que : $[1;+\infty[\subset C_{\mathbb{R}}^{E}$

Proposition

Soit A et B deux parties d'un ensemble E.

Alors :

- $C_E^E = \emptyset$ et $C_E^{\emptyset} = E$ et $C_E^{\overline{A}} = A$
- $A \subset B \Leftrightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$

2-3/ Ensemble des parties d'un ensemble

Définition

Soit E un ensemble.

On appelle ensemble des parties de E, et on note $\mathscr{P}(E)$, l'ensemble des sous-ensembles de E.

En d'autres termes : $A \in \mathscr{P}(E) \Leftrightarrow A \subset E$

Remarques

Les éléments de $\mathscr{P}(E)$ sont des ensembles. En particulier, on a $\emptyset \in \mathscr{P}(E)$ et $E \in \mathscr{P}(E)$.

Si E est un ensemble non vide, alors : $a \in E \Leftrightarrow \{a\} \in \mathscr{P}(E)$

III- Opérations dans $\mathscr{P}(E)$

3-1/ Intersection

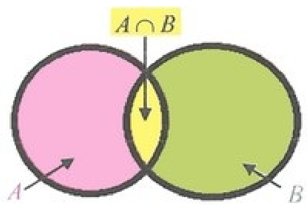
Définition

Soit A et B deux parties d'un ensemble E.

L'intersection des ensembles A et B, notée $A \cap B$, est l'ensemble des éléments de E qui sont dans A et dans B.

En d'autres termes : $x \in A \cap B \Leftrightarrow (x \in A \text{ et } x \in B)$

On a alors : $A \cap B = \{x \in E / x \in A \text{ et } x \in B\}$



Proposition

Soit A, B et C trois parties d'un ensemble E.

On a alors les propriétés suivantes :

$\boxed{1}$ $A \cap B = B \cap A$	$\boxed{4}$ $A \cap B \subset A$ *et* $A \cap B \subset B$
$\boxed{2}$ $A \cap E = A$ *et* $A \cap \emptyset = \emptyset$	$\boxed{5}$ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
$\boxed{3}$ $A \cap A = A$ *et* $A \cap \overline{A} = \emptyset$	$\boxed{6}$ $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subset B$

3-2/ Réunion

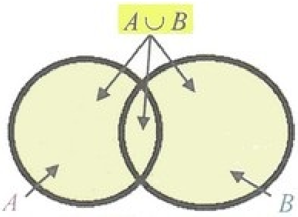
Définition

Soit A et B deux parties d'un ensemble E.

La réunion des ensembles A et B, notée $A \cup B$, est l'ensemble des éléments de E qui sont dans A ou dans B.

En d'autres termes : $x \in A \cup B \Leftrightarrow (x \in A \; ou \; x \in B)$

On a alors : $A \cup B = \{x \in E / x \in A \; ou \; x \in B\}$



Proposition

Soit A, B et C trois parties d'un ensemble E.

On a alors les propriétés suivantes :

$\boxed{1}$ $A \cup B = B \cup A$ $\boxed{2}$ $A \cup E = E \; et \; A \cup \emptyset = A$ $\boxed{3}$ $A \cup A = A \; et \; A \cup \overline{A} = E$	$\boxed{4}$ $A \subset A \cup B \; et \; B \subset A \cup B$ $\boxed{5}$ $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ $\boxed{6}$ $A \cup B = A \Leftrightarrow B \subset A$

3-3/ Règles de calcul

Soit A, B et C trois parties d'un ensemble E.

On a alors les propriétés suivantes :

Distributivité de la réunion par rapport à l'intersection :

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Distributivité de la réunion par rapport à l'intersection :

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Soit A, B et C trois parties d'un ensemble E.

Alors : $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ et $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

Ces deux égalités sont appelées « Lois de Morgan ».

Applications

On considère les deux ensembles A et B définis par :

$$A = \left\{\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} / k \in \mathbb{Z}\right\} \text{ et } B = \left\{-\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{3} / k \in \mathbb{Z}\right\}$$

1. Montrer que : $A \cap B = \emptyset$
2. Déterminer l'ensemble $(A \cup B) \cap \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Soit A, B et C trois parties d'un ensemble E.

3. Montrer que $A \cap (B \cup (A \cap C)) = A \cap (B \cup C)$ et $A \cup (B \cap (A \cup C)) = A \cup (B \cap C)$.
4. Montrer que : $(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$
5. Simplifier $A \cap \left(\overline{B \cap C}\right)$ et $\left(A \cap \overline{B}\right) \cap \left(\overline{A \cap \overline{C}}\right)$.

3-4/ Différence de deux ensembles

Définition

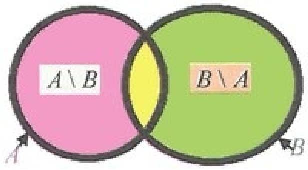
Soit A et B deux parties d'un ensemble E.

La différence des ensembles A et B dans cet ordre, notée $A\backslash B$, est l'ensemble des éléments de A qui ne sont pas dans B.

En d'autres termes : $x \in A\backslash B \Leftrightarrow (x \in A \; et \; x \notin B)$

On a alors : $A\backslash B = \{x \in E / x \in A \; et \; x \notin B\}$

$A\backslash B$ se lit « A moins B » ou « A privé de B »



Proposition

Soit A et B deux parties d'un ensemble E.

On a alors les propriétés suivantes :

$$\boxed{1} \; A\backslash B = A \cap C_E^B = A \cap \overline{B}$$
$$\boxed{2} \; A = (A\backslash B) \cup (A \cap B)$$

Applications

1. Déterminer les ensembles A et B sachant que :

$$A \cup B = \{1; 2; 3; \ldots; 11\} \text{ et } A \cap B = \{4; 5; 6; 11\} \text{ et } A\backslash B = \{7; 8; 9; 10\}$$

Soit A, B et C trois parties d'un ensemble E.

2. Montrer que $A\backslash(B \cap C) = (A\backslash B) \cup (A\backslash C)$ et $A\backslash(B \cup C) = (A\backslash B) \cap (A\backslash C)$.
3. Montrer que si $A \cap B = A \cap C$ et $B\backslash A = C\backslash A$, alors $B = C$.

Soit A, B, C et D quatre parties d'un ensemble E.

4. Montrer que : $[(B\backslash C) \subset A \; et \; (C\backslash D) \subset A] \Rightarrow (B\backslash A) \subset A$

Soit A et B deux parties d'un ensemble E.

On pose : $A \Delta B = (A\backslash B) \cup (B\backslash A)$

L'ensemble $A \Delta B$ s'appelle la différence symétrique des ensembles A et B.

5. On suppose dans cette question que $A = \{1; 2; 3; 5; 6\}$ et $B = \{2; 3; 7; 8; 9\}$, déterminer $A \Delta B$ puis construire un diagramme de Venn pour schématiser cet ensemble.
6. Montrer que pour tous A et B de $\mathscr{P}(E)$, on a :

$$A \Delta A = \emptyset \; ; \; A \Delta E = \overline{A} \; ; \; A \Delta \emptyset = A$$
$$A \Delta B = (A \cup B)\backslash(A \cap B) \; ; \; A \Delta B = \overline{A} \, \Delta \overline{B}$$

7. Montrer que pour tous A et B de $\mathscr{P}(E)$, on a les deux équivalences suivantes :

$$A \Delta B = \emptyset \Leftrightarrow A = B \text{ et } A \Delta B = A \cap B \Leftrightarrow (A = \emptyset \; et \; B = \emptyset)$$

Soit A, B et C trois parties d'un ensemble E.

8. Établir les deux égalités suivantes :

$$A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$$
$$A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$$

3-5/ Produit cartésien

Définition

Soit E et F deux ensembles.

Le produit cartésien des ensembles E et F, noté $E \times F$, est l'ensemble des couples $(x; y)$ tels que $x \in E$ et $y \in F$.

En d'autres termes : $(x; y) \in E \times F \Leftrightarrow (x \in E \; et \; y \in F)$

On a alors : $E \times F = \{(x; y) / x \in E \; et \; y \in F\}$

Remarques

Si $E = F$, le produit cartésien $E \times E$ est noté E^2 et appelé le carré cartésien de E.

Soit E et F deux ensembles. Alors : $E \times F = \emptyset \Leftrightarrow (E = \emptyset \; et \; F = \emptyset)$

Applications

On considère les deux ensembles :

$$A = \left\{n \in \mathbb{N} / n^2 < 16\right\} \text{ et } B = \{n \in \mathbb{N} / |n - 2| \leq 1\}$$

1. Écrire en extension l'ensemble $A \times B$, puis représenter un diagramme cartésien de cet ensemble.
2. En utilisant le raisonnement par contre-exemple, justifier que :
$$(E \times F) \cup (G \times H) \neq (E \cup G) \times (F \cup H)$$
3. Représenter dans un repère orthonormé les ensembles suivants :
$$[-1; 1] \times [0; 2] \text{ et } [0; +\infty[\times [0; 2[$$
4. Déterminer les éléments de l'ensemble $\mathscr{P}(E \times F)$ avec $E = \{2; 1\}$ et $F = \{0\}$.